

Bornes de Sturm pour des formes automorphes sur les corps de fonctions

travail en commun avec with Fu-Tsun Wei (NTHU, Taïwan)

Cécile Armana

Université Bourgogne Franche-Comté

Séminaire LFANT – 09 mars 2021



1. **Bornes de Sturm classiques**
2. **Cadre Drinfeld : notations, objets, problèmes**
3. **Bornes de Sturm dans le cas Drinfeld**
4. **Perspectives**

1. Bornes de Sturm classiques : énoncés

Soit $f \in M_k(\Gamma_0(N))$ avec $N \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) q^n \quad (q = e^{2i\pi z}, \operatorname{Im} z > 0).$$

Combien de coefficients successifs caractérisent f dans $M_k(\Gamma_0(N))$?

Théorème (J. Sturm, 1987)

Soit $f \in M_k(\Gamma_0(N))$. Si pour tout entier $n \leq \frac{k}{12} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ on a $c_n(f) = 0$, alors $f = 0$.

1. Bornes de Sturm classiques : algèbre de Hecke

Algèbre de Hecke $\mathbb{T}_k(\Gamma_0(N)) = \mathbb{C}[T_n \mid n \geq 1]$

Accouplement parfait avec $S_k(\Gamma_0(N))$ donné par $(f, T) \mapsto c_1(Tf)$

Corollaire (Agashé-Stein, 2002)

Comme \mathbb{C} -espace vectoriel, l'algèbre de Hecke $\mathbb{T}_k(\Gamma_0(N))$ est engendrée par les opérateurs de Hecke T_n pour

$$1 \leq n \leq \frac{k}{12} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)].$$

1. Bornes de Sturm classiques : une idée de preuve

Cas $N = 1$: formule de valence

Soit $f \in M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $f \neq 0$. Alors

$$v_\infty(f) + \sum_{P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{H}} \frac{v_P(f)}{e_P} = \frac{k}{12}$$

d'où $v_\infty(f) \leq \frac{k}{12}$.

Cas $N > 1$: classes modulo $\Gamma_0(N)$

Écrire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{i=1}^M \Gamma_0(N)\gamma_i$ où $M := [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$. Prendre

$\tilde{f} = \prod_{i=1}^M f|_{k[\gamma_i]} \in M_{Mk}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$. Appliquer le premier cas à \tilde{f} .

2. Cadre Drinfeld : notations

\mathbb{F}_q corps fini à q éléments

$$A = \mathbb{F}_q[t] \ni N$$

\cap

$$K = \mathbb{F}_q(t)$$

\cap

$$K_\infty = \mathbb{F}_q((1/t)) \supset O_\infty = \mathbb{F}_q[[1/t]] \ni \pi = 1/t$$

\cap

$$C_\infty = \widehat{K_\infty}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, c \equiv 0 \pmod{N} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(A)$$

Classique :

$$\mathbb{Z} \ni N$$

\cap

$$\mathbb{Q}$$

\cap

$$\mathbb{R}$$

\cap

$$\mathbb{C}$$

$$\Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

2. Cadre Drinfeld : formes modulaires pour $\Gamma_0(N)$

Pour $\Gamma_0(N)$, deux analogues des formes modulaires classiques

- formes modulaires de Drinfeld (équicaractéristique, à valeurs dans C_∞)
- **cochaînes harmoniques** (caractéristique mixte, à valeurs dans \mathbb{C})

2. Cadre Drinfeld : cochaînes harmoniques

L'arbre de Bruhat-Tits \mathcal{T}

(version combinatoire de \mathcal{H})

Un arbre orienté, infini, $(q + 1)$ -régulier.

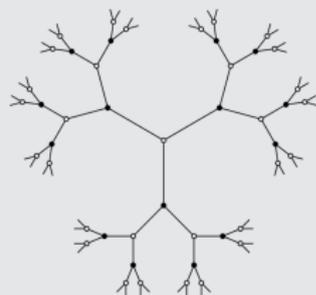
- Sommets :

$$V(\mathcal{T}) = \mathrm{GL}_2(K_\infty)/K_\infty^\times \cdot \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$$

- Arêtes orientées :

$$E(\mathcal{T}) = \mathrm{GL}_2(K_\infty)/K_\infty^\times \cdot \mathcal{I}_\infty$$

où \mathcal{I}_∞ est le sous-groupe d'Iwahori.



Cochânes harmoniques pour $\Gamma_0(N)$

Les applications $f : E(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant :

- $\forall e \in E(\mathcal{T}), f(e) + f(\bar{e}) = 0$
- $\forall v \in V(\mathcal{T}), \sum_{o(e)=v} f(e) = 0$
- $\forall \gamma \in \Gamma_0(N), \forall e \in E(\mathcal{T}), f(\gamma e) = f(e)$
- [si parabolique] f à support fini dans $E(\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{T})$.

2. Cadre Drinfeld : développement de Fourier

$H_c(N) \subset H(N)$: les \mathbb{C} -e.v. des cochaînes harmoniques (paraboliques), de dimension finie

Système de représentants des arêtes : $\begin{pmatrix} \pi^r & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (r \in \mathbb{Z}, u \in K_\infty / \pi^{-r} O_\infty)$

Développement de Fourier–Weil de $f \in H(N)$

Pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et $u \in K_\infty$:

$$f \left(\begin{pmatrix} \pi^r & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = q^{-r+2} \left(c_0(f) + \sum_{\substack{m \in A, m \text{ unitaire} \\ \deg m \leq r-2}} c_m(f) \psi(mu) \right)$$

où $c_m(f) = q^{\deg m} \int_{A \setminus K_\infty} f \left(\begin{pmatrix} \pi^{\deg m+2} & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \psi(-mu) du$ et $\psi : K_\infty \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère additif.

Coefficients : $c_0(f), (c_m(f))_{m \in A, m \text{ unitaire}}$

2. Cadre Drinfeld : un peu de contexte

$$(\text{Rappel}) \quad K = \mathbb{F}_q(t), \quad \mathcal{I}_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_\infty) \mid c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$$

Interprétation comme formes automorphes

$f \in H(N)$ \longleftrightarrow une forme automorphe parabolique
 $\text{GL}_2(K) \backslash \text{GL}_2(\mathbb{A}_K) / \mathcal{K}_0(N)_f \times K_\infty^\times \cdot \mathcal{I}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$
« spéciale en ∞ » (poids 2).

Thm. de modularité

Pour toute courbe elliptique E sur K de conducteur $N \cdot \infty$ et à réduction multiplicative déployée en ∞ , il existe une forme parabolique nouvelle, propre pour les opérateurs de Hecke et normalisée $f \in H(N)$ telle que :

pour tout polynôme unit. irréductible $p \in A$, $a_p(E) = c_p(f)$

2. Cadre Drinfeld : bornes de Sturm ?

Combien de coefficients successifs caractérisent une cochaîne harmonique dans $H(N)$?

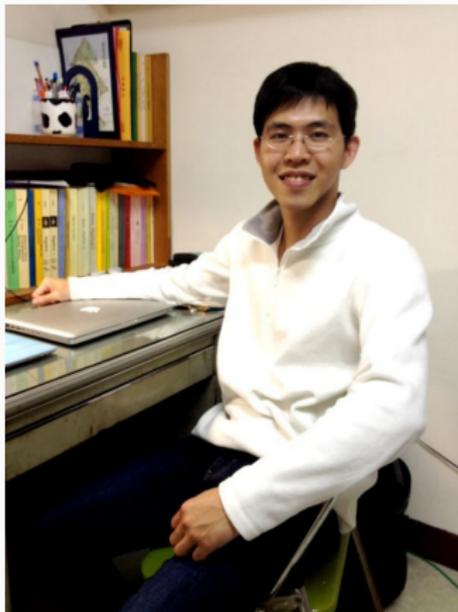
- Bornes B du type “ $c_m(f) = 0$ pour tout polyn. m unitaire dans A avec $\deg m \leq B$ ”
- Comparaison avec démonstration classique :
 - poids 2 uniquement
 - pas de formule de valence
 - rôle de $[GL_2(A) : \Gamma_0(N)]$?

Résultats connus

(1985) Gekeler : pour $H_c(N)$ avec $\deg N = 3$, borne $B = 1$.

(1992) Tan–Rockmore : pour les formes automorphes adéliques f pour GL_2 sur K , propres pour Hecke et nouvelles : $B = 5 \deg N + 5$
 $B = \deg N - 2$ si de plus f parabolique et N sans facteur carré.

3. Bornes de Sturm pour les cochaînes harmoniques



À la recherche d'une compréhension fine du graphe quotient $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{T}$

▷ A.-Wei, *Sturm-type bounds for modular forms over functions fields*, J. Number Theory, 2020, <https://arxiv.org/abs/2003.00815>

3. Bornes de Sturm pour les cochaînes harmoniques : résultats principaux

Théorème (A.–Wei, 2020)

Soit $f \in H(N)$. Notons t_N le nombre de facteurs irréductibles de N . Supposons que $c_m(f) = 0$ pour tout polynôme unitaire $m \in A$ satisfaisant :

- si N quelconque : $\deg m \leq 2 \deg N - 3$,
- si $0 \leq t_N \leq q$: $\deg m \leq \deg N - 1$,
- si $q + 1 \leq t_N \leq 2q$: $\deg m \leq \deg N + 1$.

Alors $f = 0$.

Mêmes bornes pour l'algèbre de Hecke $\mathbb{C}[T_m \mid m \text{ unitaire}]$

Borne espérée

Au moins $\deg N - 1 + 2 \lfloor \frac{t(N)-1}{q} \rfloor$ (données numériques ; borne optimale pour de petites valeurs de $q, \deg N$).

3. Bornes de Sturm pour les cochaînes harmoniques : résultats principaux

Pour les **formes paraboliques**, nous obtenons de (meilleures) bornes :

- si N quelconque : $\deg m \leq 2 \deg N - 4$,
- si N est une puissance d'un polyn. irréductible ou [N sans facteur carré et f nouvelle] ou [$N = P^2Q$ avec $\deg Q = 1$ et f est nouvelle] : $\deg m \leq \deg N - 2$.

Mêmes bornes pour les algèbres de Hecke $\mathbb{T}_c(N)$ and $\mathbb{T}_c^{\text{new}}(N)$.

3. Bornes de Sturm pour les cochaînes harmoniques : approche

(Rappel) Pour $f \in H_c(N)$ (parabolique), $r \in \mathbb{Z}$ et $u \in K_\infty$:

$$f \left(\begin{pmatrix} \pi^r & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = q^{-r+2} \sum_{\substack{\text{unitaire } m \in A \\ \deg m \leq r-2}} c_m(f) \psi(mu)$$

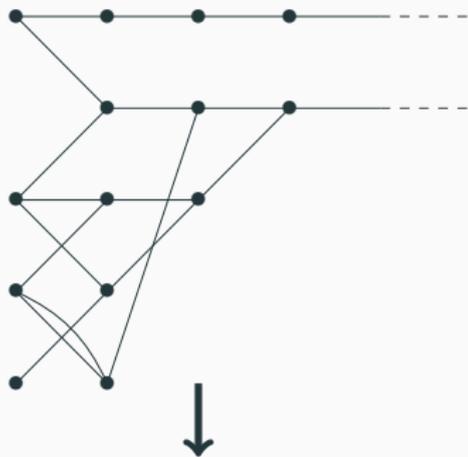
Observation

Soit $S = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^r & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid 0 \leq r \leq B \right\}$ tel que toute $f \in H_c(N)$ est déterminée par ses valeurs sur les arêtes appartenant à S .

Alors le développement de Fourier entraîne la borne “ $\deg m \leq B - 2$ ” pour $H_c(N)$.

3. Bornes de Sturm pour les cochaînes harmoniques : idées de preuve

Toute cochaîne harmonique $f \in H(N)$ peut être vue comme une application sur les arêtes du graphe quotient $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{T}$.



$$N = t^4 + t^3 + 1, \text{ irréductible dans } \mathbb{F}_2[t]$$

$$\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{T}$$

$$GL_2(A) \backslash \mathcal{T}$$

3. Bornes de Sturm pour les cochaînes harmoniques : idées de preuve

Lemme

Toute $f \in H(N)$ est déterminée par ses valeurs sur les arêtes correspondant aux matrices de $\{\gamma \mid \gamma \in \Gamma_0(N) \setminus GL_2(A)\}$.

→ On peut prendre $S = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^r & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid 0 \leq r \leq 2 \deg N - 1 \right\}$

→ Borne grossière “deg $m \leq 2 \deg N - 3$ ” pour $H(N)$.

Pour les bornes raffinées

Utiliser l'harmonicité de f , tordre le domaine fondamental par les involutions d'Atkin-Lehner,...

4. Perspectives

Pour les formes modulaires de Drinfeld : un développement « de Fourier » (indexé par des entiers), des bornes de Sturm (formule de valence).

Mais généralement pas d'accouplement parfait avec leur algèbre de Hecke à partir d'un coefficient...

Question ouverte

Borne de Sturm pour l'algèbre de Hecke sur les formes modulaires de Drinfeld ?

4. Perspectives

Dériver une telle borne à partir de celle pour les cochaînes harmoniques à valeurs dans \mathbb{Z} ?

- Isomorphisme de Gekeler–Reversat entre cochaînes harmoniques à valeurs dans C_∞ et formes modulaires de Drinfeld de poids 2
- Si l'accouplement $(f, T) \mapsto c_1(Tf)$ entre $H(N, \mathbb{Z})$ et son algèbre de Hecke est parfait sur \mathbb{Z} , en déduire une borne pour le nombre de générateurs de l'algèbre de Hecke pour les formes mod. de Drinfeld de poids 2.

Perfection ?

Oui sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ où $p = \text{car}(K)$ (Gekeler, 1995) ; oui sur \mathbb{Z} si $\text{deg } N = 3$ (Papikian–Wei, 2016)

(Non) sur \mathbb{Z} si N irréductible avec $\text{deg } N \geq 5$ (A.).

Merci pour votre attention !



Besançon



Hsinchu